Exercice 1

*/ $a = \ln\sqrt{e^3} = \frac{1}{2}\ln e^3 = \frac{3}{2}\ln e = \frac{3}{2}$

*/ $b = \ln e^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

*/ $c = e^{-\ln 3} = e^{\ln\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

Ou bien $c = e^{-\ln 3} = \frac{1}{e^{\ln 3}} = \frac{1}{3}$

*/ $d = e^{\ln 2 - \ln 5} = e^{\ln\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$

*/ $A = \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$

$= \left(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}\right)$

$= \left(2e^x\right)\left(2e^{-x}\right) = 4e^x e^{-x} = 4$

Donc $\boxed{A = 4}$

*/ $B = e^{2x} + e^{-2x} - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$

$= e^{2x} + e^{-2x} - \left(\left(e^x\right)^2 - 2e^x.e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2\right)$

$= e^{2x} + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)$

$= e^{2x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}$

Donc $\boxed{B = 2}$

Exercice 2

*/ $e^x = -3$ n'a pas des racines car $-3 < 0$

$S = \phi$

*/ $e^x = e \Leftrightarrow \ln e^x = \ln e \Leftrightarrow x = 1$

$S = \{1\}$.

*/ $3e^x = e^{-x} \Leftrightarrow 3e^{2x} = 1$

$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x = \ln\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\ln 3$

$S = \left\{-\frac{1}{2}\ln 3\right\}$

*/ $e.e^{3x-1} = 1 \Leftrightarrow e^{3x-1+1} = 1$

$\Leftrightarrow e^{3x} = e^0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

*/ $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

Posons $t = e^x$. $t^2 = \left(e^x\right)^2 = e^{2x}$

Donc on aura : .

$$\begin{cases} t^2 - 3t + 2 = 0 \\ t = e^{2x} \end{cases}$$

$t^2 - 3t + 2 = 0$ et $a + b + c = 0$

Donc $\begin{cases} t' = 1 \quad ou \quad t'' = \frac{c}{a} = 2 \\ t = e^x \end{cases}$

Donc $e^x = 1$ ou $e^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 2$.

$S = \{0, \ln 2\}$

*/ $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$. Posons $t = e^x$; $t^2 = e^{2x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 5t + 6 = 0 \\ t = e^x \end{cases}$$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1 > 0$

$$\text{Donc : } \begin{cases} t' = \frac{5+1}{2} = 3 \\ t'' = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \quad t = e^x$$

$\Leftrightarrow e^x = 3$ ou $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 3$ ou $x = \ln 2$

$S = \{\ln 2, \ln 3\}$.

*/ $e^{x^2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x^2 = \ln\frac{1}{9} \Leftrightarrow x^2 = -\ln 9 < 0$

Il n'existe aucun réel x tel que $x^2 = -\ln 9$

$S = \phi$

*/ $e^{-x^2-12x-35} = 1 = e^0$

$\Leftrightarrow -x^2-12x-35=0$

$\Leftrightarrow x^2+12x+35=0$

$\Delta' = 6^2-35 = 36-35 = 1$

Donc $x' = -6+1 = -5$ Ou $x'' = -6-1 = -7$

$S_{\mathbb{R}} = \{-7,-5\}$.

*/ $e^{x^2-5x} = e^{-6}$

$\Leftrightarrow x^2-5x = -6 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

On a : $\Delta = 1$ donc $x' = 3$ ou $x'' = 2$

$S_{\mathbb{R}} = \{2,3\}$.

Exercice 3

*/ $e^x < 1 \Leftrightarrow x < \ln 1 = 0 \Leftrightarrow x < 0$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 0[$.

*/ $e^x > e \Leftrightarrow x > 1$ donc : $S_{\mathbb{R}} =]1,+\infty[$

*/ $e^{x+2} < e^{2x-1} \Leftrightarrow x+2 < 2x-1 \Leftrightarrow x > 3$

$S_{\mathbb{R}} =]3,+\infty[$.

*/ $e^{3x-1} < 2 \Leftrightarrow 3x-1 < \ln 2 \Leftrightarrow 3x < 1+\ln 2$.

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{3}(1+\ln 2)$ Donc $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty, \frac{1}{3}(1+\ln 2)\right[$

*/

$e^{-x^2} > e^{-1} \Leftrightarrow -x^2 > -1 \Leftrightarrow x^2 < 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ d'où $S_{\mathbb{R}} =]-1,1[$

*/ $e^{-x} > 3 \Leftrightarrow -x > \ln 3. \Leftrightarrow x < -\ln 3$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -\ln 3[$.

*/ $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ On a : $a+b+c=0$

Donc $e^x = 1$ ou $e^x = 2$.

$e^{2x} - 3e^x + 2 = (e^x - 2)(e^x - 1)$.

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$e^x - 2$	$-$		0	$+$		$+$	
$e^{2x} - 3e^x + 2$	$+$	0		$-$	0	$+$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 0[\cup]\ln 2, +\infty[$

Exercice 4

1/ $e^{\ln|x|} = |x|$. $x \in \mathbb{R}^*$

2/

*/ $e^{|\ln x|} = e^{\ln x}$ si $x \geq 1$

$= x$

*/ $e^{|\ln x|} = e^{-\ln x}$ si $x \leq 1$

$= \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.

Donc

$e^{|\ln x|} = x$ si $x \geq 1$

$e^{|\ln x|} = \frac{1}{x}$ si $0 < x \leq 1$

3/ $\ln e^{|x|} = |x|. x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

1) */ $P(3) = 3^3 - 3.3^2 - 4\times 3 + 12$

$= 27 - 27 - 12 + 12 = 0$

Donc 3 est une racine.

*/ $P(x) = (x-3)(ax^2+bx+c)$

$= ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c$

Par identification on aura :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-3a=-3 \Rightarrow b=3a-3=0 \\ c-3b=-4 \\ -3c=12 \Rightarrow c=-4 \end{cases}$$

Donc $\boxed{a=1, b=0, c=-4}$

D'où $P(x)=(x-3)(x^2-4)$

2) $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-4)=0$

$\Leftrightarrow x=3$ Où $x^2=4$

$\Leftrightarrow x=3$ où $x=2$ où $x=-2$

$S=\{-2,2,3\}$

3) $e^{3x}-3e^{2x}-4e^x+12=0$

$\Leftrightarrow (e^x)^3-3(e^x)^2-4e^x+12=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^3-3X^2-4X+12=0 \\ X=e^x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow e^x=-2$ ou $e^x=2$ ou $e^x=3$.

On a : $e^x=-2<0$ impossible car $e^x>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Donc : $e^x=2$ ou $e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln 2$ où $x=\ln 3$.

$S=\{\ln 2, \ln 3\}$

Exercice 6

*/ $\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=2$. Cette équation existe si $\frac{x+1}{x+2}>0$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x+2}$	$+$	0 ‖	$-$	0 $+$

Pour $x\in\ ]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[\ =J$

On a : $\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2}=e^2$

$\Leftrightarrow (x+1)=e^2(x+2)$

$\Leftrightarrow x-e^2x=2e^2-1$

$\Leftrightarrow x(1-e^2)=2e^2-1$

$\Leftrightarrow x=\frac{2e^2-1}{1-e^2}$

$\frac{2e^2-1}{1-e^2}=\frac{2(e^2-1)+1}{1-e^2}$

$=-2+\frac{1}{1-e^2}=-2-\underbrace{\frac{1}{e^2-1}}_{\text{positif}}<-2$

donc $x=\frac{2e^2-1}{1-e^2}\in J$

(On peut utiliser la calculatrice pour vérifier que $\frac{2e^2-1}{1-e^2}<-2$)

Donc $S=\left\{\frac{2e^2-1}{1-e^2}\right\}$

*/ $e^{3x+4}=4 \Leftrightarrow 3x+4=\ln 4, x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3x=\ln 4-4=\ln 2^2-4=2\ln 2-4$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\ln 2-4}{3}=\frac{2(\ln 2-2)}{3}$

$S=\left\{\frac{2}{3}(\ln 2-2)\right\}$.

*/ $e^x-e^{-x}=\frac{15}{4}, x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^x(e^x-e^{-x})=\frac{15}{4}e^x$

$\Leftrightarrow (e^x)^2-1=\frac{15}{4}e^x$

$\Leftrightarrow 4(e^x)^2-15e^x-4=0$

$\Delta=(-15)^2+64=289=17^2$

Donc :

$e^x=\frac{15+17}{8}=4$ ou $e^x=\frac{15-17}{8}<0$ impossible.

$\Rightarrow x=\ln 4=2\ln 2$

Donc $S=\{2\ln 2\}$

*/ $e^{2x}-4e^x-5=0$ on a $a-b+c=0$

Donc $e^x=-1$ ou $e^x=5$

$e^{2x} - 4e^x - 5 = (e^x + 1)(e^x - 5) > 0$

On sait que $e^x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x > 5 \Leftrightarrow x > \ln 5$

$S =]\ln 5, +\infty[$

*/ $|e^{x-1} - 1| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le e^{x-1} - 1 \le 3$

$-2 \le e^{x-1} \le 4$ on a :

$e^{x-1} \ge -2$ Vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$

$e^{x-1} \le 4 \Leftrightarrow x - 1 \le \ln 4 = 2\ln 2.$

$\Leftrightarrow x \le 1 + 2\ln 2$. Donc $S =]-\infty, 1 + 2\ln 2]$

*/ $2e^{3x-1} - 3e^{2x-1} + e^{x-1} \le 0$

$\Leftrightarrow 2e^{3x}.e^{-1} - 3e^{2x}e^{-1} + e^x.e^{-1} \le 0$

$\Leftrightarrow e^{-1}(2e^{3x} - 3e^{2x} + e^x) \le 0$

$\Leftrightarrow e^{-1} \times e^x (2e^{2x} - 3e^x + 1) \le 0$, et $e^{-1} \times e^x \ge 0$

$\Leftrightarrow 2e^{2x} - 3e^x + 1 \le 0$

On a : $2e^{3x} - 3e^{2x} + e^x = 0$ or $a + b + c = 0$

Donc : $e^x = 1$ ou $e^x = \frac{1}{2}$

Ce qui donne $x = 0$ où $x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$2e^{3x} - 3e^{2x} + e^x = 2(e^x - 1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$e^x - \frac{1}{2}$	$-$	0		$+$		$+$	
$2e^{3x} - 3e^{2x} + e^x$	$+$	0	$-$	0	$+$		

$S = [-\ln 2, 0]$.

Exercice 7

1) */ $f(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$f(1) = 1 \times e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

*/ $g(x) = x^2 e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = (x^2)'.e^{-x} + x^2.(e^{-x})'$

$= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = g'(x)$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $2x - x^2$ car $e^{-x} > 0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{+\infty}} = 0.$

2) Branches infinies :

*/ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

$\Rightarrow C_f$ Admet une branche infinie parabolique

De direction $(o, \vec{j})$.

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

Donc C_g admet une B.I.P de direction $(o,\vec{j})$.

*/ Position relative de C_f et C_g.

$g(x)-f(x)=x^2e^{-x}-xe^{-x}=xe^{-x}(x-1)$

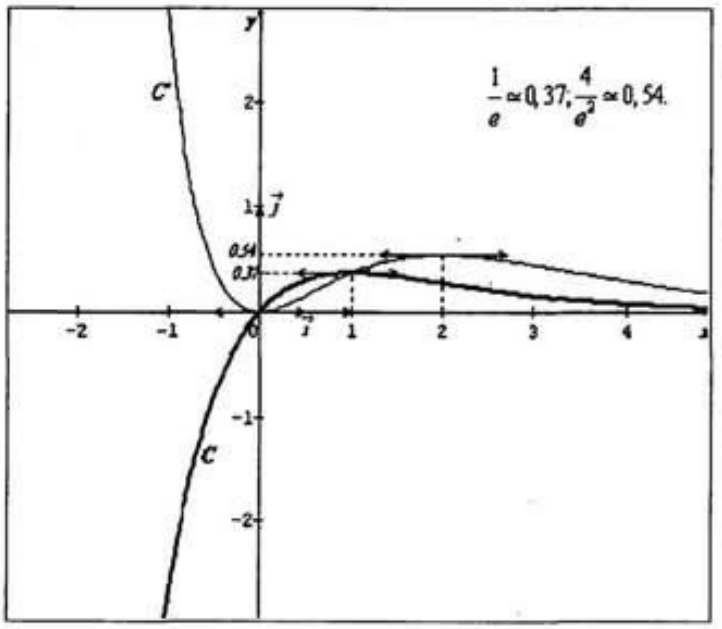
Le signe de $g(x)-f(x)$ est celui de

$x(x-1)$ car $e^{-x}>0$ donc :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)-f(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
Position	C_g/C_f		C_f/C_g		C_g/C_f		
			$(0,0)$		$(1,e^{-1})$		

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

$\Rightarrow y=0$ Asymptote pour C_f et C_g



Exercice 8

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}-2e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x(e^{2x}-2)=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}2xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2.\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2.\dfrac{1}{(\frac{e^x}{x})}=0$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(\frac{e^x}{x^3})}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{e^{-x}}_{=0}+2x\right)=+\infty$

*/ Posons $t=\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}(e^t-1)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=(1-0)\times e^0=1\times1=1$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}3.\underbrace{\dfrac{e^{3x}}{3x}}_{+\infty}.\underbrace{-\dfrac{1}{x}}_{0}=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}.\underbrace{\dfrac{e^x}{x^2}}_{+\infty}-\underbrace{\dfrac{1}{2x}}_{0}=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-3}{e^x+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(1-\frac{3}{e^{2x}}\right)}{e^x\left(1+\frac{2x}{e^x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\underbrace{\frac{3}{e^x}}_{0}}{1+\underbrace{\frac{2}{(\frac{e^x}{x})}}_{+\infty}}=\dfrac{1}{1}=1$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=1$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-\underbrace{\dfrac{1}{e^x}}_{0}}=\dfrac{+\infty}{1}=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$ (formule)

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ (formule)

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2.e^{\frac{1}{x}}=+\infty\times1=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x+\dfrac{1}{x}.e^x=0+0=0$

*/ $\begin{cases}Posons\ X=x\ln 2\\ x=\dfrac{X}{\ln 2}\end{cases}$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln2}-1}{x}=\lim_{X\to0}\frac{e^X-1}{X.\dfrac{1}{\ln 2}}$$

$$=\lim_{X\to0}\frac{e^x-1}{x}.\frac{1}{\dfrac{1}{\ln2}}=\frac{1}{\dfrac{1}{\ln2}}=\ln2.$$

Remarque : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=a\ ;a\in IR^*$

*/ • Pour $x>0$: posons $t=\dfrac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to0^+}x^2.e^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty$$

• Pour $x<0$: posons $t=\dfrac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to0^-}x^2.e^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{t^2}\times e^t=0.$$

Conclusion :

$\lim\limits_{x\to0^-}x^2.e^{\frac{1}{x}}\neq\lim\limits_{x\to0^+}x^2.e^{\frac{1}{x}}$. Donc

$x^2e^{\frac{1}{x}}$ n'a pas de limite en 0.

*/

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}};\text{posons } X=\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{X\to+\infty}(1-X).e^X=-\infty$$

*/ posons $X=1+e^x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X-1}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}.\frac{X}{X-1}$$

$$=0\times1=0$$

*/ posons $X=1+e^x$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln X}{X-1}=1.$$

*/

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e\left(e^x-1\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(e\times\frac{e^x-1}{x}\right)=e$$

*/ $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}.=\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

Posons $X=\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to0^-}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}(1-X)e^X$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(1-X)e^X=\lim_{x\to-\infty}e^X-Xe^X=0$$

*/ $\lim\limits_{x\to0}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^x=?$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^-}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^x=-\infty$.

Conclusion :

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^x$ n'a pas de limite en 0.

*/

On a : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln x=(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x}=0$

Exercice 9

1) $f(x)=e^{-x^2+2x}$ $D_f=\mathbb{R}$.

la fonction $u: x\to u(x)=-x^2+2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(\mathbb{R})=]-\infty,1]$ or la fonction e^x est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty,1]$

$$\boxed{(uov(x))'=v'(x)\times u'(v(x))}$$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x)=\left(-x^2+2x\right)'e^{-x^2+2x}$$

$$\boxed{f'(x)=(-2x+2)e^{-x^2+2x}}$$

2) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2-1}}$

f est définie si $x^2-1\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

f est **dérivable** sur D_f (fonction composée donc même travail que la question précédente) et on a

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)'.e^{\frac{-1}{x^2-1}}.$$

Or $\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)'=-\left(\frac{1}{x^2-1}\right)'$

$$=-\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{2x}{x^2-1}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{U}\right)'=-\frac{U'}{U^2}}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}e^{-\frac{1}{x^2-1}}}$

3) $f(x)=e^{\sqrt{x^2-x-2}}$ f est définie si : $x^2-x-2\geq 0$

On a : $x^2-x-2=0$, $a-b+c=0$

Donc $x'=-1$; $x''=-\frac{c}{a}=2$

Etude de signe :

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0 $-$	0	$+$

Donc $D_f=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$.

f est dérivable si $x^2-x-2>0$

Donc pour $x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ on a :

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)'.e^{\sqrt{x^2-x-2}}$$

Avec $(\sqrt{x^2-x-2})'=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

$$\boxed{\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$

Donc $\forall x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}e^{\sqrt{x^2-x-2}}}$$

4) $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

f est définie et dérivable si et seulement si

$e^{2x}-1\neq 0\Leftrightarrow e^{2x}\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0$

D'où $D_f=\mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$f'(x)=\frac{\left(e^{2x}+1\right)'\left(e^{2x}-1\right)-\left(e^{2x}-1\right)'\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)-2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{2\left[e^{4x}-e^{2x}-e^{4x}-e^{2x}\right]}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{u^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-4e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}^*}$$

Exercice 10

$f(x)=2e^{2x}-e^x$.

1) $D_f=\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(2e^x-1\right)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{2x}-e^{x}=0$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x)=4e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(4e^{x}-1\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{4}=-\ln 4$

□Si $x \geq \ln\frac{1}{4}$:

$\Leftrightarrow e^{x}\geq\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4e^{x}\geq 1$

$\Leftrightarrow 4e^{x}-1\geq 0$

f Strictement croissante sur $\left[\ln\frac{1}{4},+\infty\right[$.

□Si $x\leq \ln\frac{1}{4}$:

$4e^{x}-1\leq 0$

f strictement décroissante sur $\left]-\infty,\ln\frac{1}{4}\right]$

$f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=2e^{2\ln\frac{1}{4}}-e^{\ln\frac{1}{4}}$

$=2e^{\ln\frac{1}{16}}-e^{\ln\frac{1}{4}}=2\times\frac{1}{16}-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$

x	$-\infty$	$\ln\frac{1}{4}=-2\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↘	$-\frac{1}{8}$	↗ $+\infty$

3) $f(x)=0=2e^{2x}-e^{x}=0$

$\Leftrightarrow e^{x}\left(2e^{x}-1\right)=0, e^{x}\neq 0\Leftrightarrow 2e^{x}-1=0$

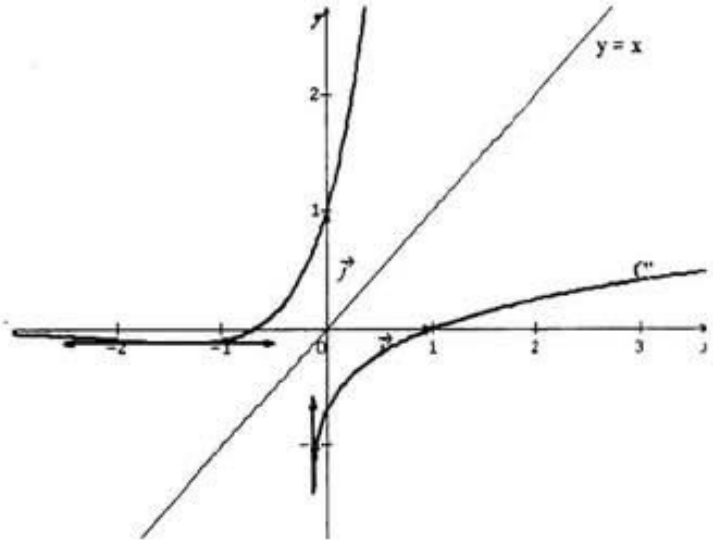
$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}-e^{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(2e^{x}-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}\times\left(2e^{x}-1\right)$

$=+\infty\times(+\infty)=+\infty$

$\Rightarrow C$ admet une B.I.P de direction $(o,\vec{j})$.



5) $I=\left[\ln\frac{1}{4},+\infty\right[$.

a) g est continue et strictement croissante sur I donc g réalise une bijection réciproque g^{-1} définie sur J tel que

$J=g(I)=\left[g\left(\ln\frac{1}{4}\right),\lim\limits_{x\to+\infty}g\right[=\left[-\frac{1}{8},+\infty\right[$

b) $C'=S_{\Delta}(C)$. avec $\Delta: y=x$.

c) $g(y)=x\Leftrightarrow y=g^{-1}(x)$, $y\in I, x\in J$

$g(y)=x\Leftrightarrow 2e^{2y}-e^{y}=x$

$\Leftrightarrow 2e^{2y}-e^{y}-x=0$ (*on cherche y*)

$\Delta=(-1)^{2}-4(-x)\times 2=1+8x$

$x\geq-\frac{1}{8}\Rightarrow 8x\geq-1\Rightarrow 8x+1\geq 0$

Donc :

$e^{y_1} = \dfrac{1+\sqrt{1+8x}}{4}$

$e^{y_2} = \dfrac{1-\sqrt{1+8x}}{4}$ (*impossible*)

Car par exemple pour $x=1$ on aura

$e^{y_2} = \dfrac{1-\sqrt{9}}{4} = -\dfrac{1}{2} < 0$

D'où

$y_1 = g^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+8x}}{4}\right)$, $x \in J$

6) $F(x) = e^{2x} - e^x + cte.$

$F[\ln(0,5)] = e^{2\ln 0,5} - e^{\ln 0,5} + cte$

$= 0,25 - 0,5 + cte = -0,25 + cte = 0$

Donc $cte = 0,25$

$$\boxed{F(x) = e^{2x} - e^x + \frac{1}{4}}$$

Exercice 11

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$$

1)*/ $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x}+1 \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^{2x}+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} = 0$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{0}{0+1} = 0$

2) $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

$f(-x) - f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} - \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

$= \dfrac{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right) - e^x\left(e^{-2x}+1\right)}{\left(e^{-2x}+1\right)\left(e^{2x}+1\right)}$

$= \dfrac{\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^{-x} + e^x\right)}{\left(e^{-2x}+1\right)\left(e^{2x}+1\right)} = 0$

Donc : $f(-x) = f(x)$

D'où f est paire.

3) $f'(x) = \dfrac{\left(e^x\right)'\left(e^{2x}+1\right) - \left(e^{2x}+1\right)'e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^x\left(e^{2x}+1\right) - 2e^{2x}.e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^{3x} + e^x - 2e^{3x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \dfrac{e^x - e^{3x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

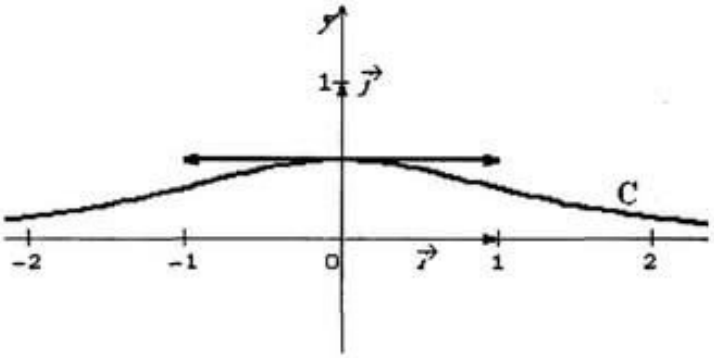
$f'(x) = \dfrac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-e^{2x}$

T.V :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Courbe :



4) $g(x) = \ln(\tan x)$

$g'(x) = \left(1+\tan^2 x\right) \times \dfrac{1}{\tan x} > 0$

g est continue et strictement croissante

Sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ .donc g réalise une bijection

h définie sur J = $g\left(\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$

On pose $\tan x = X$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\tan x)$

$= \lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln(\tan x) = \lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$

D'où $g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{0^+} g, \lim_{\frac{\pi}{2}} g\right[= \square$

5) a) g est strictement croissante sur $\square$ donc h est strictement croissante sur $\square$.

b) g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

de plus $g'(x) \neq 0. \forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Donc h est dérivable sur $\square$ et on a :

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$$

$$= \frac{1}{\left[1+\tan^2 h(x)\right].\frac{1}{\tanh(x)}}$$

$$h'(x) = \frac{\tanh(x)}{1+\tan^2 h(x)}.$$

Or $g(h(x)) = x$ et $g(h(x)) = \ln\left|\tan h(x)\right|$

$\Leftrightarrow g(h(x)) = x = \ln(\tan[h(x)])$

$\Leftrightarrow \boxed{\tan(h(x)) = e^x}$

D'où

$$h'(x) = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = f(x)$$

Donc

$\boxed{\forall x \in \square : h'(x) = f(x)}$

c) $f(x) > 0, \forall x \in \square$

Donc $h'(x) > 0, \forall x \in \square$

et par suite h est strictement croissante sur $\square$.

Exercice 12

$$f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

1) f est définie si $e^x - 1 \neq 0$.

Or $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Donc $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{e^x}} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 - \infty = -\infty$$

2)a) $x \in \square^*, 2\times0 - x = -x \in \square$

$$f(2\times0 - x) = f(-x) = 2\times(-x) + \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1}$$

$$= -2x + \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} \times \frac{e^x}{e^x} = -2x + \frac{1}{1-e^x}$$

On a :

$$f(-x) + f(x) = -2x + \frac{1}{1-e^x} + 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$= -\frac{1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 1$$

$\left(f(-x) + f(x) = 1 = 2\times(0,5)\right)$

Ce qui donne :

$$f(2\times0 - x) = 2\times(0,5) - f(x)$$

Donc $I(0;0,5)$ est un centre de symétrie pour C.

b) $$f'(x) = 2 + \frac{(e^x)'(e^x - 1) - e^x(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2}$$

$$= 2 + \frac{e^x(e^x - 1) - e^x.e^x}{(e^x - 1)^2} = 2 + \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2(e^x - 1)^2 - e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\left(e^x-1\right)^2-e^x=0$

$\Leftrightarrow 2\left(e^{2x}-2e^x+1\right)-e^x=0$

$\Leftrightarrow 2e^{2x}-4e^x+2-e^x=0$

$\Leftrightarrow 2e^{2x}-5e^x+2=0$

$\Delta=(-5)^2-4\times2\times2=25-16=9$

Donc $e^x=\dfrac{5+3}{4}=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

ou

$e^x=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$

D'où : $2e^{2x}-5e^x+2=2\left(e^x-2\right)\left(e^x-\dfrac{1}{2}\right)$

T.V :

x	$-\infty$ $-\ln2$	0	$\ln2$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$	‖	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$-1-2\ln2$ ↗ ↘ $-\infty$ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ ↗ $+\infty$ $2\ln2+2$

$f(\ln 2)=2\ln 2+\dfrac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}-1}$

$=2\ln 2+\dfrac{2}{2-1}=2\ln 2+2$

$f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)=2\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^{\ln\frac{1}{2}}}{e^{\ln\frac{1}{2}}-1}=2\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}$

$=2\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=2\ln\dfrac{1}{2}-1=-2\ln 2-1$

On a :

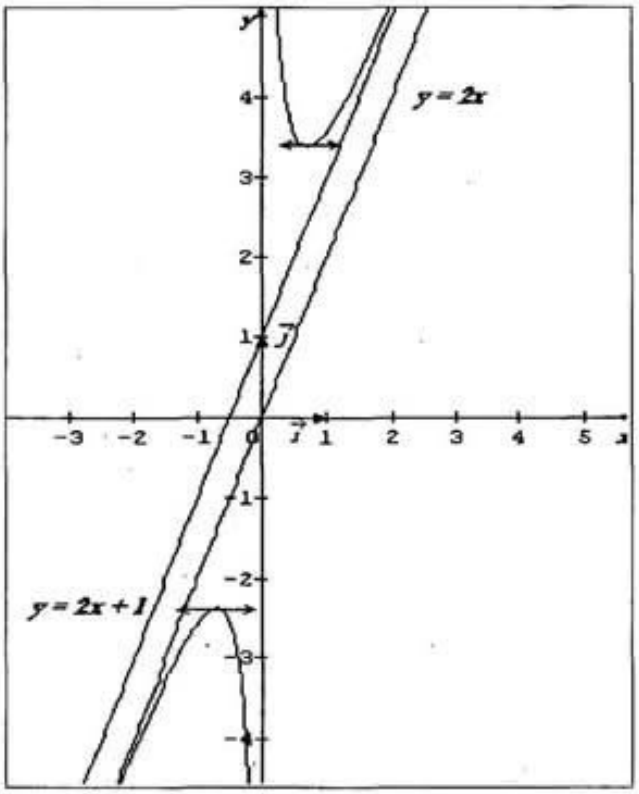
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=0$

$\Leftrightarrow \Delta: y=2x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=1$

$\Leftrightarrow \Delta': y=2x+1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

Remarque : on pourra étudier f et tracer C_f sur $]0,+\infty[$ puisque $I(0;0,5)$ est un centre de symétrie.



3) $2xe^x+(1-k)e^x-2x+k=0$

$\Leftrightarrow$

$2xe^x+e^x-ke^x-2x+k=0$

$\Leftrightarrow$

$2x\left(e^x-1\right)+k\left(1-e^x\right)+e^x=0$

$\Leftrightarrow$

$2x\left(e^x-1\right)+e^x=-k\left(1-e^x\right)$

$\Leftrightarrow$

$2x\left(e^x-1\right)+e^x=k\left(e^x-1\right), x\neq0$

$\Leftrightarrow$

$\dfrac{2x\left(e^x-1\right)}{e^x-1}+\dfrac{e^x}{e^x-1}=k.\dfrac{\left(e^x-1\right)}{e^x-1}$

$\Leftrightarrow$

$2x+\dfrac{e^x}{e^x-1}=k \Leftrightarrow f(x)=k.$

Graphiquement on a :

*/ si $k=2\ln\dfrac{1}{2}-1$ ou $k=2\ln 2+2$

On a une seule solution.

*/ si $k\in\left]2\ln\dfrac{1}{2}-1;2\ln 2+2\right[$.

Aucune solution.

*/ si $k>2\ln 2+2$ ou $k<2\ln\dfrac{1}{2}-1$

On a deux solutions.

Exercice 13

$f(x)=e^x+e^{-x}-2 \qquad g(x)=e^x-e^{-x}$

$D_f=\square \quad , \quad D_g=\square .$

1) Variations de f:

$f'(x)=e^x-e^{-x}=e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+e^{-x}-2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+e^{-x}-2=+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Variations de g :

$g'(x)=e^x+e^{-x}>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-e^{-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-e^{-x}=-\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Rmq : on pourra remarquer que :

*/ f est une fonction paire.

*/ g est une fonction impaire.

Donc l'étude peut se faire seulement sur $[0,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{e^{-x}}{x}-\dfrac{2}{x}$

$=+\infty+0-0=+\infty$

C_f admet une B.I.P de direction $\left(o,\vec{j}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^{-x}}{x}=+\infty-\dfrac{0}{+\infty}=+\infty$

C_g admet une B.I.P de direction $\left(o,\vec{j}\right)$.

(Rmq : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^x}=0$)

3)a) g est continue et strictement croissante sur IR

Donc g est une bijection de $\square$ sur $\square$.

b) g est dérivable sur $\square$ et $g'(x)\neq 0, \forall x\in\square$.

Donc g^{-1} est dérivable sur $\square$.

c) $1,5\in\square$ donc g^{-1} est dérivable en 1,5 et $\left(g^{-1}\right)'(1,5)=\dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(1,5)\right)}$

Or $g^{-1}(1,5)=x\Leftrightarrow g(x)=1,5$

$e^x-e^{-x}=1,5\Leftrightarrow e^{2x}-1=\dfrac{3}{2}e^x$

$\Leftrightarrow e^{2x}-\dfrac{3}{2}e^x-1=0$

$\Delta=\dfrac{9}{4}+4=\dfrac{25}{4}, \sqrt{\Delta}=\dfrac{5}{2}$

$$\begin{cases} e^x=\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2}=\dfrac{8}{4}=2 \\ ou \\ e^x=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{2}=-\dfrac{1}{2}, imp \end{cases}$$

Donc $e^x=2\Rightarrow x=\ln 2$ et par suite

$$\left(g^{-1}\right)'(1,5)=\frac{1}{g'(\ln 2)}=\frac{1}{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}$$

$$=\frac{1}{2+e^{\ln\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\left(g^{-1}\right)'(1,5)=\frac{2}{3}}$$

4) notons f_1 la restriction de f à $[0,+\infty[$.

f_1 est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[\Rightarrow f_1$ est une bijection

réciproque de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$

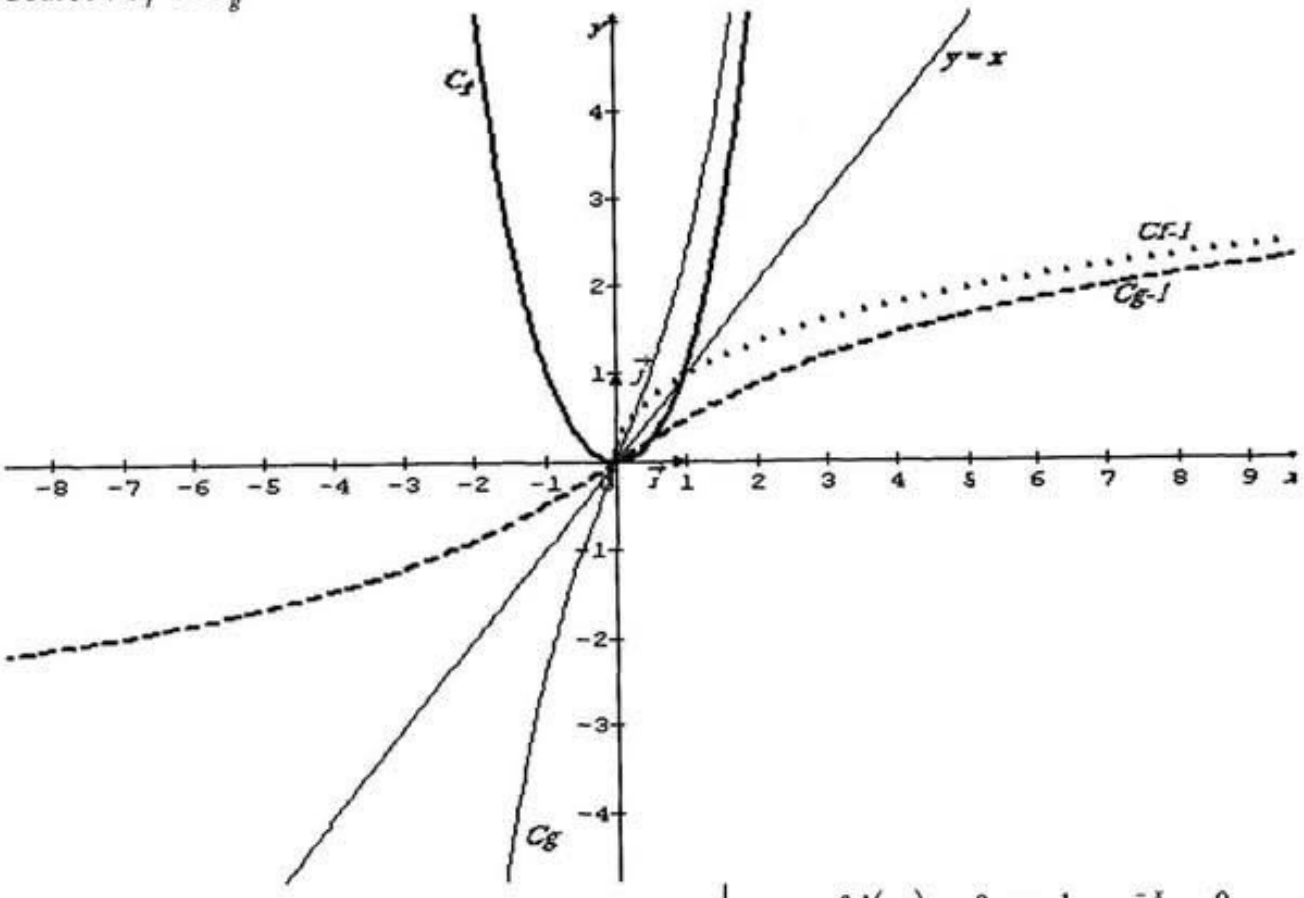
T.V :

x	0	$+\infty$
$(f_1^{-1})'(x)$	+	
$f_1^{-1}(x)$	0	$+\infty$

On a : f_1 et f_1^{-1} ont même sens de variation.

$C_{f_1^{-1}} = S_{\Delta(y=x)}(C_{f_1})$, $C_{g^{-1}} = S_{\Delta(y=x)}(C_g)$

Courbe : C_f et C_g



Exercice 14

$f(x) = x - 1 + e^{-x}$

1) $Df = \mathbb{R}$

$f'(x) = (x-1)' + (e^{-x})' = 1 - e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Pour $x \le 0 \Leftrightarrow -x \ge 0 \Leftrightarrow e^{-x} \ge 1 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} \le 0$

Pour $x \ge 0 \Leftrightarrow -x \le 0 \Leftrightarrow e^{-x} \le 1 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} \ge 0$

T.V :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$f(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 + e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 + e^{-x} = ? \; F.I(-\infty + \infty)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\underbrace{0^-}_{xe^x}}\right) = +\infty$

Ou bien :

Posons $X = -x \Rightarrow x = -X$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 + e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} -X - 1 + e^X$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} X\left(-1 - \frac{1}{X} + \frac{e^X}{X}\right) = +\infty$

Etude des Branches infinies :

*/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - 1 + e^{-x}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\text{monome de plus haut degré}} + \frac{1}{xe^x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} -1 + e^{-x} = -1$

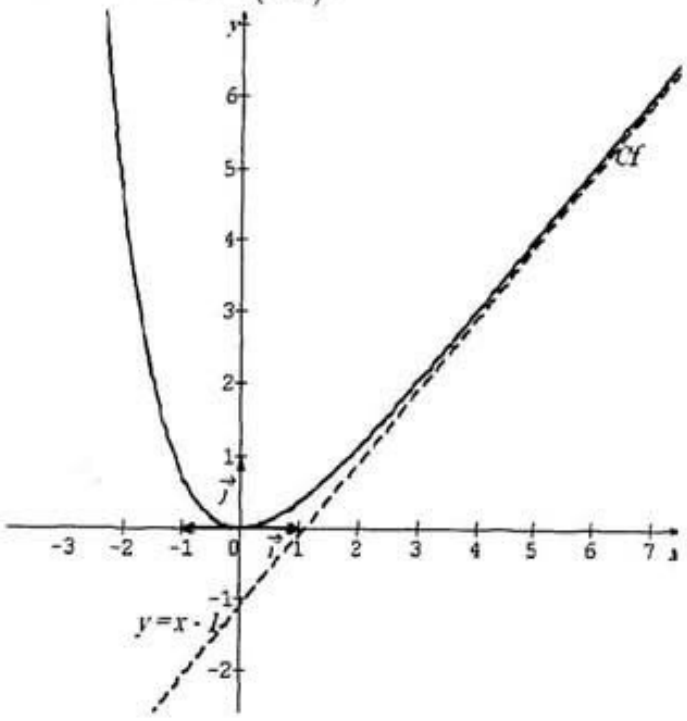
Donc $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

*/ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - 1 + e^{-x}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - 1}{x} + \frac{e^{-x}}{x}, X = -x$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{-X - 1}{-X} + \frac{e^X}{-x} = 1 - \infty = -\infty$

Au voisinage de $-\infty$ C_f admet une B.I.P de direction celle de $(o, \vec{j})$.



2) $f(0) = 0$??

Exercice 15

$$\begin{cases} f(x) = xe^{2x+1}, x \leq 0 \\ f(x) = x(1 - \ln x), x > 0 \end{cases}$$

1) */ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x - x\ln x = 0 = f(0)$

Donc f est continue a droite en 0.

*/ $\lim\limits_{x \to 0^-} xe^{2x+1} = 0 = f(0)$

Donc f est continue a gauche en 0.

Conclusion :

f est continue a en 0.

2) */ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(1-\ln x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} 1-\ln x = +\infty$

f non dérivable a droite en 0.

*/ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{xe^{2x+1}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} e^{2x+1} = e$

Donc f est dérivable a gauche en 0

et $f_g'(0) = e$

Conclusion :

f non dérivable en $x_0 = 0$.

3) •Pour $x<0$:

$f'(x) = (x)'e^{2x+1} + x(2x+1)'e^{2x+1}$

$= e^{2x+1} + 2xe^{2x+1}$

$\Leftrightarrow f'(x) = (2x+1)e^{2x+1}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de

$(2x+1)$ Car $e^{2x+1} > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0
$2x+1$		$-$	0	$+$	

• Pour $x>0$:

$f'(x) = (x)'(1-\ln x) + x(1-\ln x)'$

$= 1-\ln x + x\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1-\ln x - 1 = -\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

Conclusion :

T.V :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	‖	↗	1	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x+1}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x).e^{x+1} = 0$ $\boxed{e^a.e^b = e^{a+b}}$

$f(1) = 1(1-\ln 1) = 1$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}\times 2+1} = -\dfrac{1}{2}e^{-1+1}$

$= -\dfrac{1}{2}e^0 = -\dfrac{1}{2}$

4)*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ est une

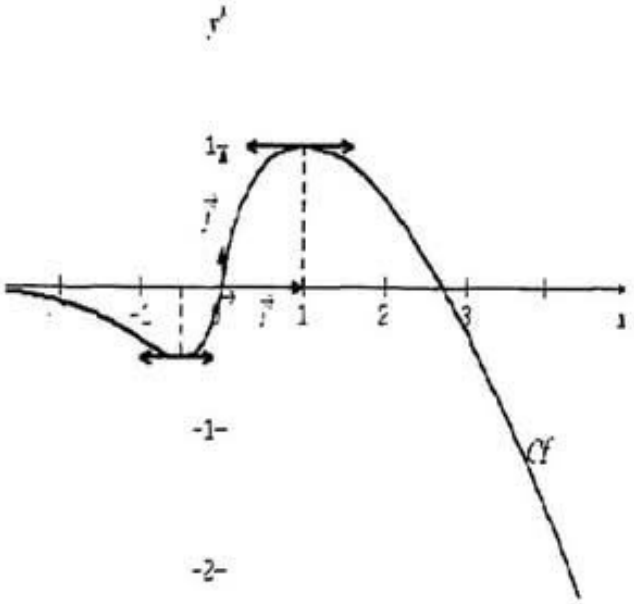
Asymptote a C_f au voisinage de $-\infty$.

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^{2x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1} = +\infty$

C_f Admet une B.I.P au voisinage de $+\infty$ de direction celle de $(o,\vec{j})$

Courbe :



Pour $x>0$: $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0$

$\Leftrightarrow x=e$

Exercice 16

$f(x)=\sqrt{1-e^{2x}}$

1) $1-e^{2x}\geq 0 \Leftrightarrow 1\geq e^{2x} \Leftrightarrow 0\geq 2x \Leftrightarrow x\leq 0$

Donc $D_f = D =]-\infty, 0]$

$x\in]-\infty,0[$ On a : $-x\geq 0$ et

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{x}=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{-x}$$

$$=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{x^2}}\left(\sqrt{x^2}=|x|=-x; x\leq 0\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{-x}\sqrt{-x}}=\frac{-1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{1-e^{2x}}{-x}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{x}}=\frac{-1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{2(e^{2x}-1)}{2x}}$$

Donc : $x\in]-\infty,0[= D-\{0\}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{-1}{\sqrt{-x}}\sqrt{2\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}$$

ou bien :

$x\in \mathbb{R}^*_- = D-\{0\}$

$$-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sqrt{2\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{x}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sqrt{\frac{1-e^{2x}}{-x}}=-\frac{1}{\sqrt{-x}}.\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{-x}}$$

$$=-1\times\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{(-x)^2}}=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{|x|}$$

$$=-\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{-x}=\frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

2) on a :

on pose $t=2x$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\lim_{t\to 0^-}\frac{e^t-1}{t}=1$$

Donc : $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{-x}}.\sqrt{2\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}$

$$=\frac{-1}{0^+}.\sqrt{2}=-\infty$$

f Non dérivable a gauche en 0 et par la suite C_f admet une demi-tangente Verticale érigé vers le haut (ordonné positif) au point d'abscisse0

3) $f'(x)=\frac{(1-e^{2x})'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{-2e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}$, $x<0$

$$=-\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\leq 0.$$

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	↗	0

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - e^{2x}} = 1$.

4) a) f continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ donc f admet une fonction Réciproque f^{-1} définie sur

$f(]-\infty, 0]) = \left[f(0), \lim\limits_{x \to -\infty} f \right[= [0,1[= E$

b) $y \in]-\infty, 0], x \in [0,1[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

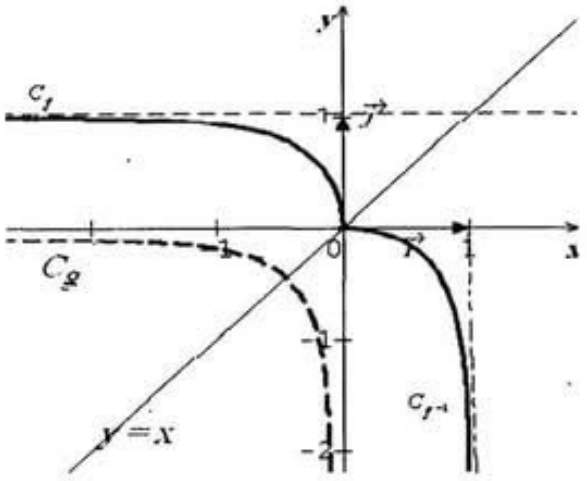
On a : $f(y) = \sqrt{1-e^{2y}} = x$

$\Leftrightarrow 1 - e^{2y} = x^2 \Leftrightarrow 1 - x^2 = e^{2y}$

$\Leftrightarrow \ln(1-x^2) = 2y \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = y$

D'où $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2), x \in [0,1[}$

c) Courbe :



5) $g(x) = x + \frac{1}{2}\ln(e^{-2x} - 1)$

a) Soit $x \in]-\infty, 0[$

$\ln(f(x)) = \ln\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right) = \frac{1}{2}\ln(1-e^{2x})$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\left[e^{2x}(e^{-2x}-1)\right]\right]$ $\quad \boxed{\ln ab = \ln a + \ln b}$

$= \frac{1}{2}\ln e^{2x} + \frac{1}{2}\ln(e^{-2x}-1)$

Or $\boxed{\ln e^{2x} = 2x}$

Donc $g(x) = x + \frac{1}{2}\ln(e^{-2x}-1)$ $\forall x \in D\text{-}\{0\}$

b/ $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ et $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases}$ $x \in]-\infty, 0[$

Donc g'(x) < 0

T.V :

x	$-\infty$		0
$g'(x)$		$+$	
$gf(x)$	0	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(f(x))$, *on pose* $X = f(x)$

$= \lim\limits_{X \to 1} \ln X = \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \ln(f(x))$

$= \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X$ $(on\ pose\ X = f(x) > 0)$

$= -\infty$

$y = 0$ et $x = 0$ sont deux asymptotes à C_g.

Exercice 17

$g(x) = -x - 1 + e^x$

1) $g'(x) = -1 + e^x$

$\Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

le signe de $g'(x)$ est celui de $e^x - 1$.

- Si $x \geq 0 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0$

Donc g est strictement croissante

- Si $x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow e^x - 1 \leq 0$

Donc g est strictement décroissante

2) $g'(x)$ s'annule en 0 et change de
Signe donc g admet en o un minimum
absolue atteint $g(0)=0$
donc $\forall x \in \square\ ; g(x) \geq 0$
D'où
$-x-1+e^x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1+x$
$\Rightarrow \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{1+x} \Rightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$

3) $f(x) = \ln(1+x) + e^{-x}$

a) $Df =]-1, +\infty[$
*/ $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$
$= \lim\limits_{x \to (-1)^+} \ln(1+x) + e^{-x}; X = 1+x; -x = 1-X$
$\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X + e^{1-X} = -\infty$

*/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) + e^{-x} = +\infty$

b/ $f'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} - e^{-x} = \frac{1}{1+x} - e^{-x}$.
Or d'après la question 2) $e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$
Donc $f'(x) \geq 0$

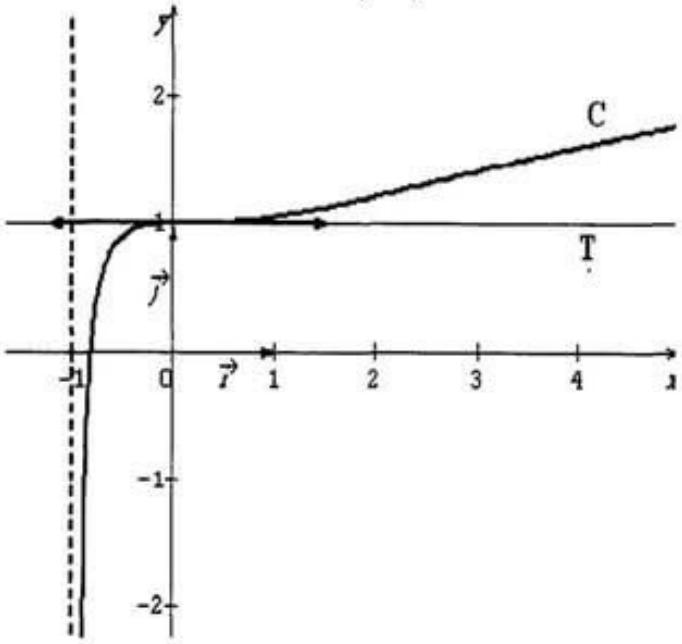
x	-1		$+\infty$
$f(x)$	||	+	
$f(x)$	||	↗	$+\infty$
	||		
	$-\infty$		

c) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$
$y = 0(x-0) + 1$
$\boxed{T : y = 1}$

Courbe :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{xe^x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{1+x}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{1+x}{x}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{xe^x}}_{0} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \quad (t = x+1)$$

Donc C admet une B.I.P (branche infinie parabolique) de direction $(o, \vec{j})$



Exercice 18 ?

1) la lame de verre absorbe 4% de la lumière donc la proportion de la lumière incidente qui traverse une lame est 96%.
la deuxième lame de verre absorbe 4% de 96% donc la lumière incidente qui traverse la deuxième lame est :
$\frac{96}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{384}{100}$ C'est-à-dire 3,84%
Donc pour 2 lames : la lumière incidente est : $(96-3,84)\% = 92,16\%$.

C'est-à-dire : $\left(\frac{96}{100}\right)^2 = \frac{92,16}{100}$
Donc la lumière incidente qui traverse 20 lames est $\left(\frac{96}{100}\right)^{20} \square\ 44,2\%$

2) 40% de la lumière incidente absorbée
Donc 60% de la lumière traverse les n lames.

$$\left(\frac{96}{100}\right)^n = \frac{40}{100}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{96}{100}\right)^n = \ln\left(\frac{40}{100}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{96}{100}\right) = \ln\frac{4}{10}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 0.4}{\ln 0.96} \approx 22,44$$

il faut avoir 22 lames.

Exercice 19

$f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$

1) on a : $f(x) = e^{x \ln 3}$

$f'(x) = \ln 3 . e^{x \ln 3} > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0, (\ln 3 > 0)$

T.V :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$		↗	$+\infty$
	0		

Branches infinies :

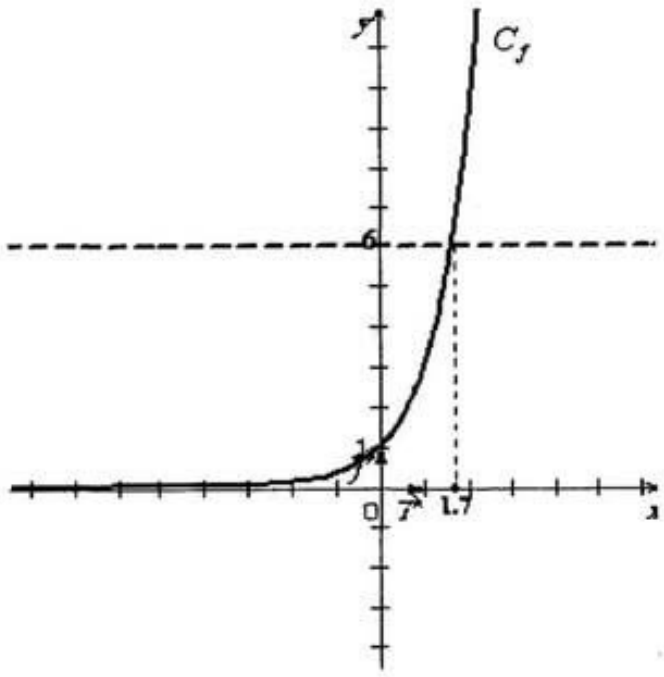
*/ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ est une asymptote au voisinage de $-\infty$.

*/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x \ln 3}}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln 3 \frac{e^{x \ln 3}}{x \ln 3} \overset{t = x \ln 3}{=} \lim_{x \to +\infty} \ln 3 . \frac{e^t}{t} = +\infty$$

$\Rightarrow C_f$ Admet une B.I.P de direction $(o, \vec{j})$.

Courbe



2) */ graphiquement : les solutions de l'inéquation

$3^x \leq 6$ sont les abscisses des points de C_f

situées au dessous de la droite $\Delta : y = 6$.

Donc $S =]-\infty ; 1,7]$

*/ par calcul :

$3^x \leq 6 \Leftrightarrow e^{x \ln 3} \leq 6$
(la fonction $\ln x$ est croissante)

Donc $\ln\left(e^{x \ln 3}\right) \leq \ln 6$

$\Leftrightarrow x \ln 3 \leq \ln 6$ $\boxed{\ln e^a = a}$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{\ln 6}{\ln 3}, (\ln 3 > 0)$

$S = \left]-\infty, \frac{\ln 6}{\ln 3}\right]$ Avec $\frac{\ln 6}{\ln 3} \approx 1,63$.

Exercice 20

$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$

1) $f'(x) = \ln\left(\frac{1}{5}\right).\left(\frac{1}{5}\right)^x < 0$

Car $\frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \ln\frac{1}{5} < 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\frac{1}{5}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x\ln 5}$

$= \lim\limits_{X\to-\infty} e^X, (X = -x\ln 5)$

$= 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x\ln 5}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

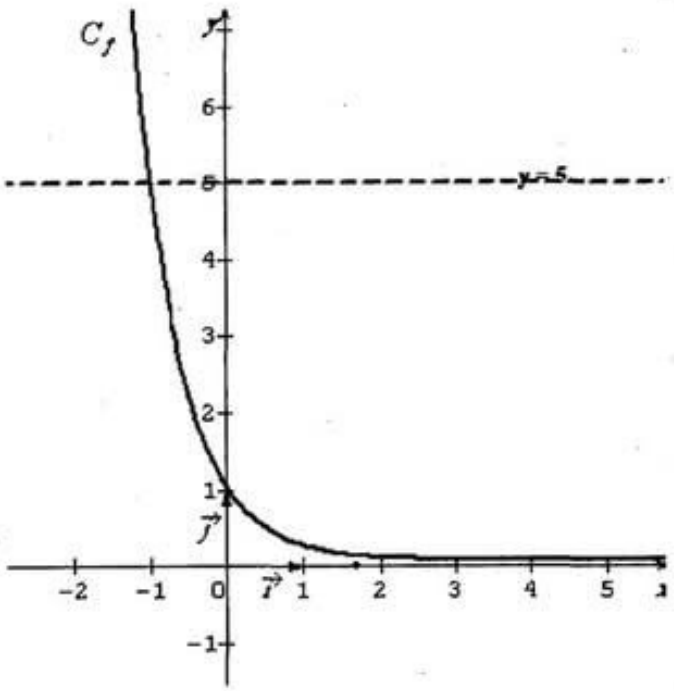
T.V :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x\ln 5}}{x}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -\ln 5\,\frac{e^X}{X} = -\infty \quad (X = -x\ln 5)$

$\Rightarrow C_f$ Admet une B.I.P de direction $(o,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$ et $y=0$ est une asymptote a C_f au voisinage de $+\infty$



2) graphiquement :

les solutions de l'inéquation $(\frac{1}{5})^x \le 5$

Sont les abscisses des points de C_f

Situées au dessous de la droite $\Delta : y = 6$.

Donc $S = [-1, +\infty[$.

Par calcul :

$\left(\frac{1}{5}\right)^x \le 5 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{5}\right)^x \le \ln 5 \Leftrightarrow x\ln\left(\frac{1}{5}\right) \le \ln 5$

$\Leftrightarrow -x\ln 5 \le \ln 5 \Leftrightarrow x \ge \frac{\ln 5}{-\ln 5} = -1$

Donc $S = [-1, +\infty[$.

Exercice 21

NB : les valeurs données dans la troisième question sont des valeurs approchées par défaut

$f(x) = e^{-x}.\sin(2x)$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \le \sin 2x \le 1$ et $e^{-x} > 0$

Donc : $-e^{-x} \le e^{-x}.\sin 2x \le e^{-x}$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{-e^{-x} \le f(x) \le e^{-x}}$$

2) */ $f(x+\pi) = e^{-(x+\pi)}.\sin(2x+2\pi)$

$= e^{-x}.e^{-\pi}.\sin 2x$

Donc : $\boxed{f(x+\pi) = \frac{1}{e^{\pi}}.f(x)}$

*/ $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.\sin\left(2(x+\frac{\pi}{2})\right)$

$= e^{-x}.e^{-\frac{\pi}{2}}.(-\sin(2x+\pi))$ ($e^{a+b}=e^a e^b$)

$= e^{-\frac{\pi}{2}} \times \left[e^{-x}(-\sin 2x)\right]$ ($\sin(a+\pi)=-\sin a$)

Or $e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\left(e^{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$

Donc $\boxed{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}.f(x)}$

3) sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

f est dérivable et on a :

$f'(x) = \left(e^{-x}\right)'.\sin 2x + e^{-x}.(\sin 2x)'$

$= -e^{-x}.\sin 2x + e^{-x}.(2\cos 2x)$

$= (2\cos 2x - \sin 2x).e^{-x}$

Comme on a : $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ alors :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(2\cos 2x - \sin 2x)$

On a : $2\cos 2x - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \tan 2x = 2$???

La fonction *tan2x* est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ avec la calculatrice on cherche une valeur de x dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

(la calculatrice donne :

$\left.\begin{array}{l}\tan\frac{5\pi}{14} \approx 2.076 \\ \tan\frac{99\pi}{280} \approx 2.018 \\ \tan\frac{7\pi}{20} = \tan\frac{98\pi}{280} \approx 1.962\end{array}\right\}$ et $1.962 \le 2 \le 2.018$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires la valeur de x chercher se trouve dans l'intervalle $\left[\frac{98\pi}{560}, \frac{99\pi}{560}\right]$

Pour les variations et le traçage de la courbe on une valeur approché de x par défaut

$x \in \frac{7\pi}{40} + k\frac{\pi}{2}$, k $\in \mathbb{Z}$

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{7\pi}{40} + k\frac{\pi}{2} \le \pi$

$-\frac{1}{2} \le \frac{7}{40} + \frac{k}{2} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{7}{40} \le \frac{k}{2} \le 1 - \frac{7}{40}$

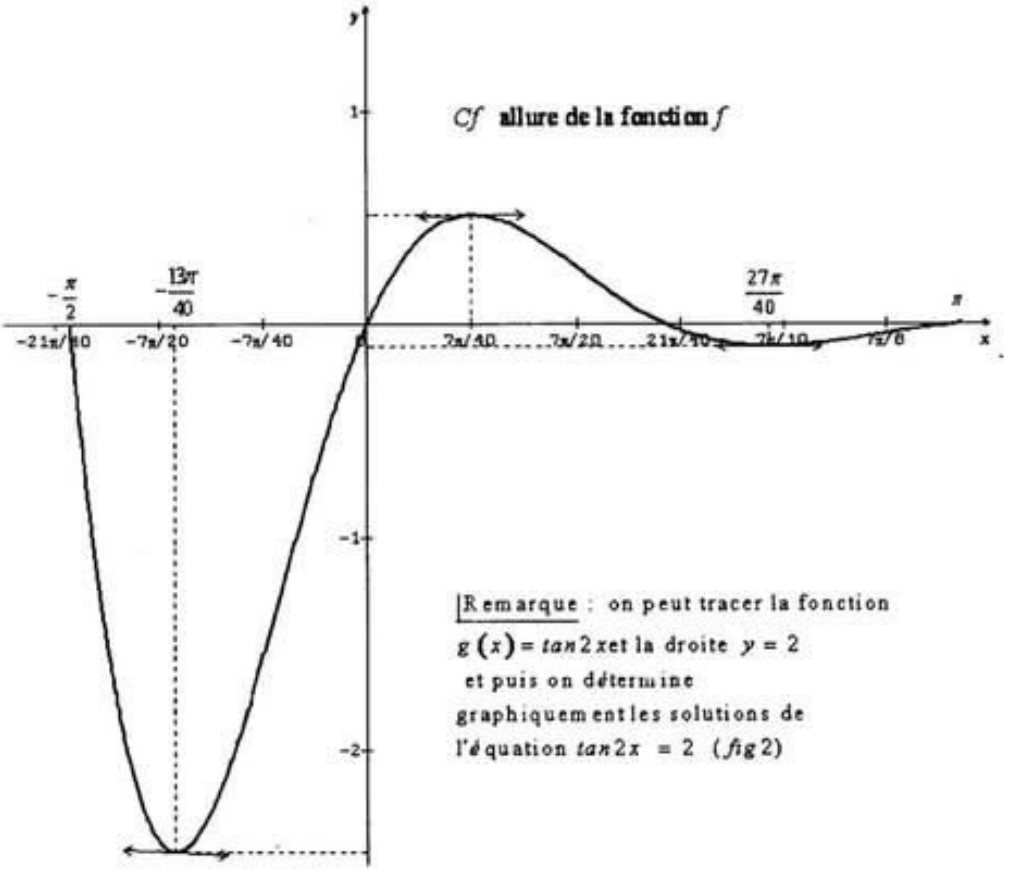
$\Leftrightarrow -1 - \frac{7}{20} \le k \le 2 - \frac{7}{20} \Leftrightarrow -1.35 \le k \le 1.65$

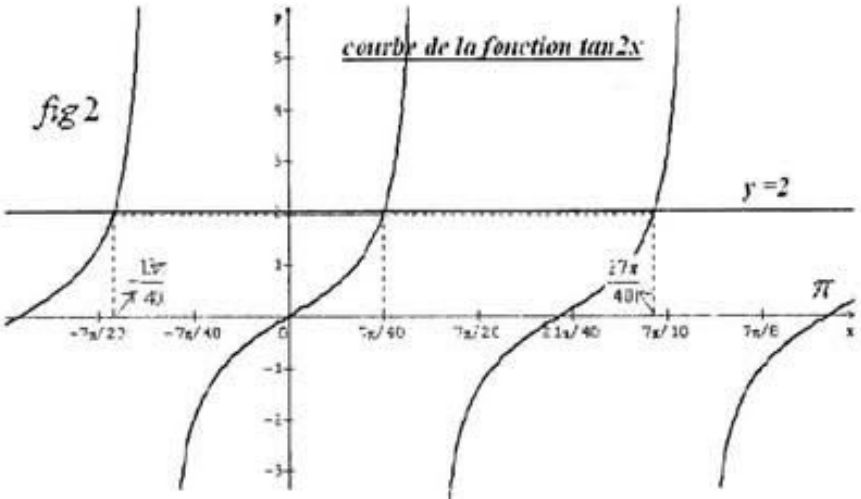
$\Rightarrow k = 0$ ou $k = -1$ *ou* $k = 1$

Donc $x \in \frac{7\pi}{40}$; $x \in -\frac{13\pi}{40}$ ou $x \in \frac{27\pi}{40}$

Tableau des variations de f

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{13\pi}{40}$		$\frac{7\pi}{40}$		$\frac{27\pi}{40}$		π
$f(x)$	–	0	+	0	—	0	+		
$f(x)$	0	↘	−2.4	↗	0.5	↘	−0.13	↗	0


Cf allure de la fonction f
Remarque : on peut tracer la fonction
g(x) = tan2x et la droite y = 2
et puis on détermine
graphiquement les solutions de
l'équation tan2x = 2 (fig2)



Exercice 22

1) $g(x) = e^{2x} - e^{x} + 1, x \in \mathbb{R}$

a) $g'(x) = 2e^{2x} - e^{x}$

$= e^{x}\left(2e^{x} - 1\right)$

Comme $e^{x} > 0$ Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $2e^{x} - 1$.

Or $2e^{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{1}{2}$

T.V :

x	$-\infty$	$\ln\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$\frac{3}{4}$	↗ $+\infty$

*/ $g\left(\ln\frac{1}{2}\right) = e^{2\ln\frac{1}{2}} - e^{\ln\frac{1}{2}} + 1$

$= e^{\ln\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - e^{x} + 1$

$= 0 - 0 + 1 = 1$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^{x} + 1$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x} - 1 + \dfrac{1}{e^{x}}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1 \Leftrightarrow y = 1$ est une asymptote à Cg

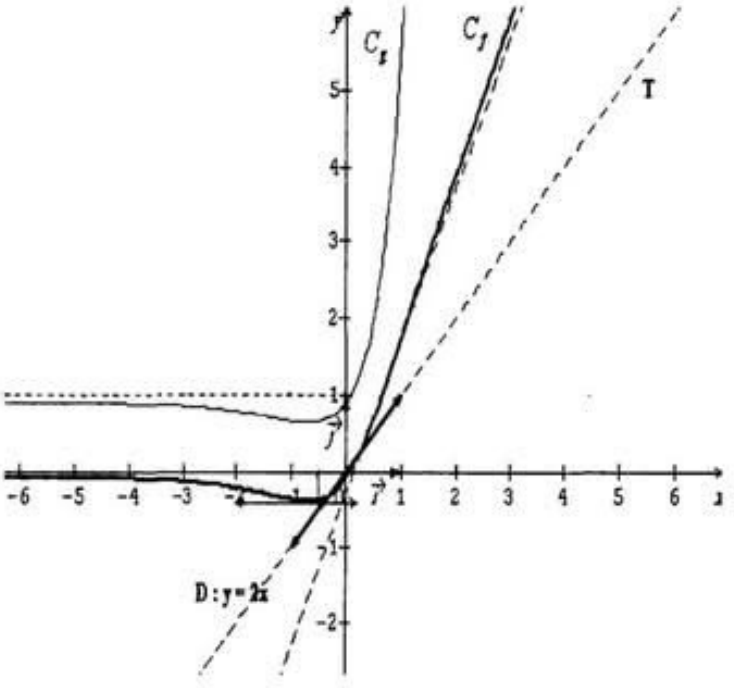
On a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} - \dfrac{e^{x}}{x} + \dfrac{1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(\dfrac{e^{x}}{x} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{xe^{x}}\right) = +\infty$

Donc C_g admet une B.I.P de direction $(o, \vec{j})$.



c) $k \in \mathbb{R}_+^*$

$(E): e^{2x} - e^{x} + 1 - k = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} - e^{x} + 1 = k$

Donc l'équation (E) est équivalente à

$g(x) = k$

- Si $k \in \left]0, \dfrac{3}{4}\right[$:

  L'équation n'a pas des solutions.

- Si $k \in \left[1, +\infty\right[\cap \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$:

  L'équation admet une seule solution

- Si $k \in \left]\dfrac{3}{4}, 1\right[$:

  l'équation admet deux solutions.

<u>Remarque :</u> les solutions de $g(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de C_g et $\Delta : y = k$.

2) $f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right), x \in \mathbb{R}$

a)

$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$

$= \ln\left[e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)\right]$

$= \ln e^{2x} + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

$f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + e^{-x} + e^{-2x}\right)$

$= \ln(1) = 0$.

Donc : $D: y = 2x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

c) $f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right) = \ln\left(g(x)\right)$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Puisque $g(x) > \dfrac{3}{4}$ (voir variation de g)

Alors $g(x) > 0$ d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $g'(x)$

Donc f et g ont même sens de variation

D'où :

f est strictement croissante sur $\left[\ln\frac{1}{2},+\infty\right[$

f est strictement croissante sur $\left]-\infty,\ln\frac{1}{2}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(g(x)\right)=\ln(1)=0$

$\Rightarrow y=0$ est une asymptote a C au voisinage de $-\infty$.

Soit T la tangente a C_f au point $O(0,0)$.

$T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$

T: $\boxed{y=x}$

$f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=\ln\left(g\left(\ln\frac{1}{2}\right)\right)=\ln\frac{3}{4}$

(voir courbe au dessus)

Exercice 23

$f(x)=\sqrt{1+x}.e^{-x}, x\in[-1,+\infty[$

1) a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{1+x}.e^{-x}}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{1+x}^2.e^{-x}}{\sqrt{1+x}(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}}=\dfrac{e}{0^+}=+\infty$

f non dérivable à droite en -1.

b) la courbe représentative C_f admet au point d'abscisse (-1) une demi tangente verticale dirigé vers le haut

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}.e^{-x}, \quad X=-x$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}(\sqrt{1-X}.e^{X})\times\dfrac{\sqrt{1-X}}{\sqrt{1-X}}$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{(1-X)e^{X}}{\sqrt{1-X}}$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}\dfrac{e^{X}-Xe^{X}}{\sqrt{1-X}}=0$

Ou bien : on sait que $\sqrt{e^{-2x}}=e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}.e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(1+x).e^{-2x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{e^{2x}}+\dfrac{x}{e^{2x}}}$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{e^{X}}+\dfrac{X}{2e^{X}}}; X=2x$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{e^{X}}+\dfrac{1}{2\dfrac{e^{X}}{X}}}=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote a C au voisinage de $+\infty$.

2) f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a :

$f'(x)=\sqrt{1+x}'e^{-x}+\sqrt{1+x}.e^{-x}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}e^{-x}-\sqrt{1+x}.e^{-x}$

$=e^{-x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\sqrt{1+x}\right)$

$=e^{-x}\left(\dfrac{1-2(1+x)}{2\sqrt{1+x}}\right)$

$f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1+x}}(-1-2x)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-1-2x$

T.V :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘	0

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{2}}.e^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{e}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{e}{2}}$$

3) soit T la tangente au point O.

T a pour équation : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$$\boxed{T: y=-\frac{1}{2}x+1}$$

4) l'équation $f(x)=x$ est équivalente à

$f(x)-x=0$.

Posons $g(x)=f(x)-x$.

On a : $g'(x)=f'(x)-1$

Comme $x\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ alors $f'(x)\le 0$

Donc $g'(x)\le 0$. et par suite g est une bijection de $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ sur

$$g\left(\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[\right)=\left]\lim_{+\infty} g, g\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\left]-\infty,\sqrt{\frac{e}{2}}+\frac{1}{2}\right]$$

Avec : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{e}{2}}+\frac{1}{2}$$

Comme $0\in\left]-\infty,\sqrt{\frac{e}{2}}+\frac{1}{2}\right]$

Donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et par suite

$f(x)=x$: admet une unique solution

$\alpha\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

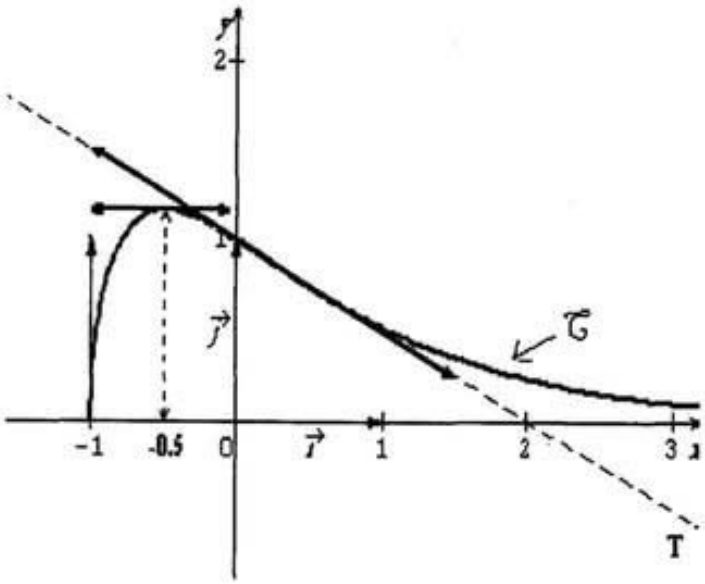
$$g\left(\frac{1}{2}\right)\times g(1)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]\times\left[f(1)-1\right]$$

$$=\left[\sqrt{\frac{3}{2}}.e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right]\times\left[\sqrt{2}.e^{-1}-1\right]$$

$\square$ $(0,25)\times(-0,47)\le 0$

Donc $\boxed{\alpha\in\left]\frac{1}{2},1\right[}$

5)



Exercice 24

$f(x)=2e^{-x}+x-2$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-x}+x-2$

$$=\lim_{x\to+\infty} 2\frac{1}{e^x}+x-2=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{-x}+x-2;(X=-x)$

$=\lim\limits_{X\to+\infty} 2e^{X}-X-2$

$$=\lim_{X\to+\infty} X\left(2.\frac{e^X}{X}-1-\frac{2}{X}\right)=+\infty$$

2) a) $-2e^{-x}+1>0 \Leftrightarrow 2e^{-x}<1$

$\Leftrightarrow e^{-x}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(e^{-x}\right)<\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow -x<\ln\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x>-\ln\frac{1}{2}=-(-\ln 2)$

Donc $x>\ln 2$ et par suite $S_{\square} =]\ln 2,+\infty[$

b) f est dérivable sur $\square$ et :

$f'(x)=\left(2e^{-x}+x-2\right)'=-2e^{-x}+1$

$f'(x)=0=-2e^{-x}+1 \Rightarrow e^{-x}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -x=\ln\frac{1}{2} \Rightarrow x=\ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2-1$	↗	$+\infty$

$f(\ln 2)=2e^{-\ln 2}+\ln 2-2$

$=2e^{\ln\frac{1}{2}}+\ln 2-2$

$=2\times\frac{1}{2}+\ln 2-2$

$\boxed{f(\ln 2)=\ln 2-1}$

c) */ f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,\ln 2]$, $0\in[\ln 2-1,+\infty[$ et $f(0)=0$
Donc 0 est l'unique solution de $f(x)=0$ dans $]-\infty,\ln 2]$.

*/ f est continue et strictement croissante sur $[\ln 2,+\infty[$ .d'où f est une bijection de $[\ln 2,+\infty[$ dans $[\ln 2-1,+\infty[$
$0\in[\ln 2-1,+\infty[$ Donc l'équation $f(x)=0$ Admet une seule solution $\alpha\in[\ln 2,+\infty[$.

$f(1,5)\times f(1,6)\square(-0,05)\times(0,008)<0$

Donc $\alpha\in]1,5;1,6[$

3) a)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x}}=0$

Donc la droite $\Delta: y=x-2$ est une asymptote oblique a $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} 2\frac{e^{-x}}{x}+1-\frac{2}{x}$

$\lim\limits_{X\to+\infty} 2.\frac{e^{X}}{-X}+1+\frac{2}{X}=-\infty$

Donc $(\mathcal{C})$ admet une branche infini parabolique de direction $\left(o,\vec{j}\right)$ au voisinage de $(-\infty)$.

4) a) $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)=-x$

$\boxed{T: y=-x}$

b) $g(x)=2e^{-x}+2x-2$

$g'(x)=-2e^{-x}+2=2\left(1-e^{-x}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)=2\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}}\right)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘		0	↗	

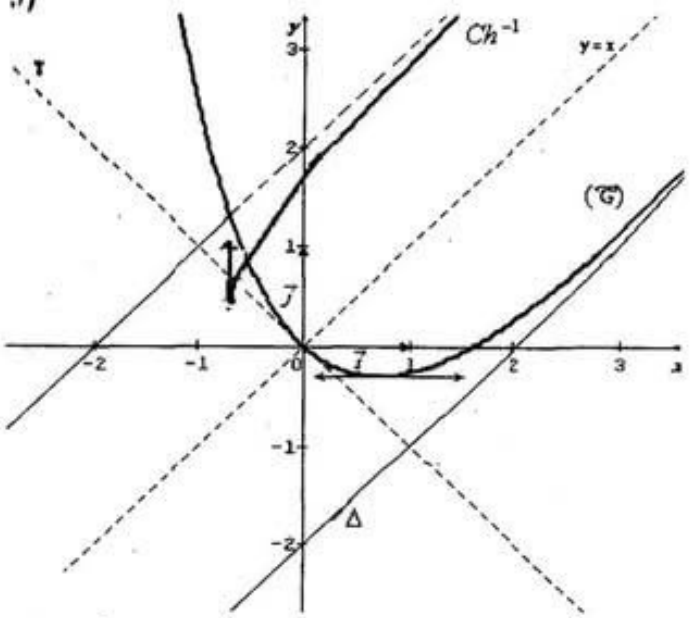
g admet un minimum absolue en 0 atteint 0.

Donc : $\forall x\in\square, g(x)\geq 0$

c) $g(x)\geq 0$ et $g(x)=f(x)-(-x)\geq 0$

Donc ($\mathcal{C}$) est au dessus de sa tangente T.

5)



5) a)

X	$\ln 2 - 1$	$+\infty$
$(h^{-1})'(x)$	+	
$h(x)$	$\ln 2$	$+\infty$

b) $C_{h^{-1}} = S_{(y=x)}(C_h)$

Exercice 25

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}},\ x \in \mathbb{R}.$$

1) a) */ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^{2x}}+1} = 1$$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{\left(e^{2x}\right)'\left(1+e^{2x}\right) - e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)'}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}\left(1+e^{2x}\right) - e^{2x}\times 2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} + 2e^{4x} - 2e^{4x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2},\ \forall x \in \mathbb{R}}$$

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	1

c) pour $x \in \mathbb{R}$ et $2\times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$

Et on a : $f(2\times 0 - x) + f(x) = f(-x) + f(x)$

$$f(-x) + f(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} + \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$= \frac{e^{-2x}\left(1+e^{2x}\right) + e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)\left(1+e^{-2x}\right)}$$

$$= \frac{e^{-2x}+1+e^{2x}+1}{1+e^{-2x}+e^{2x}+1} = 1$$

Donc $f(2\times 0 - x) + f(x) = 2\times\dfrac{1}{2}$

D'où le point $I\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

d) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

2) a) $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \dfrac{2e^{2t}}{\left(1+e^{2t}\right)^2}$

On a :

$$f'(t) - \frac{1}{2} = \frac{2e^{2t}}{\left(1+e^{2t}\right)^2} - \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = \frac{4e^{2t} - \left(1+e^{2t}\right)^2}{2\left(1+e^{2t}\right)^2}$$

$$f'(t) = \frac{4e^{2t} - \left(1+2e^{2t}+e^{4t}\right)}{2\left(1+e^{2t}\right)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-1+2e^{2t}-e^{4t}}{2\left(1+e^{2t}\right)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-\left(e^{2t}-1\right)^2}{2\left(1+e^{2t}\right)} \le 0$$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}$: $f'(t) \le \dfrac{1}{2}$

b) f continue sur $[0, x]$ et dérivable

sur $]0, x[$ et $0 \le f'(t) \le \dfrac{1}{2}$

d'après Le théorème des inégalités des Accroissements finis on a :

$$0 \le f(x) - f(0) \le \frac{1}{2}(x-0)$$

D'où : $f(x) - \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{2}x$

C'est-à-dire $f(x) \le \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

Donc $\forall x \ge 0$: $f(x) \le \dfrac{1}{2}(x+1)$

c) */ pour $x \ge 0$

On a : $f(x) \le \dfrac{1}{2}(x+1)$

D'où (C) la courbe représentative

de f est au dessus de la tangente T.

*/ pour $x \le 0$:

f Continue sur $[x, 0]$ est dérivable

Sur $]x, 0[$ et $f'(t) \le \dfrac{1}{2} (\forall t \in \mathbb{R})$

Donc d'après le théorème des inégalités

des accroissements finies on a :

$$f(0) - f(x) \le \frac{1}{2}(0 - x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - f(x) \le -\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow f(x) \ge \frac{1}{2}(x+1)$$

D'où $\mathcal{C}$ la courbe représentative

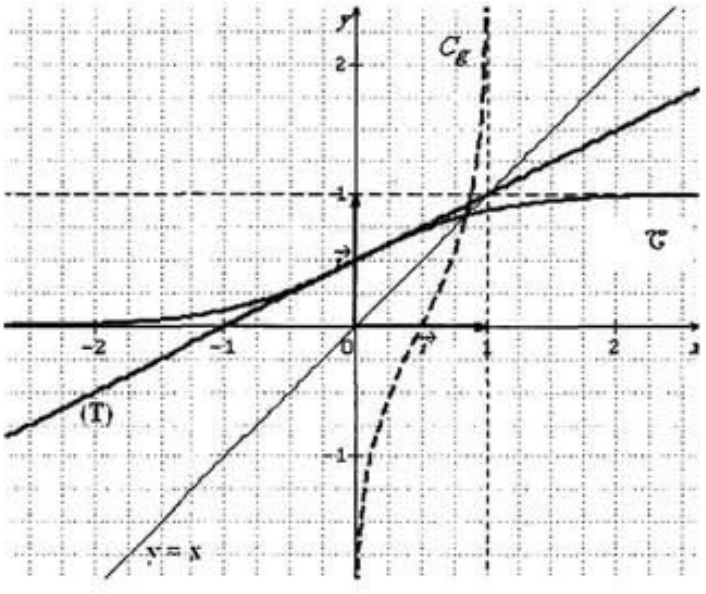
de f est au dessus de la tangente T

.Conclusion :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Position de ζ et T	ζ / T	T / ζ	

$(0, 1/2)$

3)



4) a) f continue et strictement croissante

sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection réciproque définie sur : $f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f\right[=]0,1[$.

b) $x \in \mathbb{R}, y \in]0,1[$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = y$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = y\left(1+e^{2x}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - ye^{2x} = y$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(1-y) = y \text{ or } y \neq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{y}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

Donc : pour $x \in \mathbb{R}, y \in]0,1[$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

c) f est une bijection et d'après b/

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Donc $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$

D'où $g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = f^{-1}(x)$

Donc C_g est le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à : $\Delta : y = x$.

Exercice 26

$$Q(t) = \frac{1}{3}t.e^{3-t}$$

1) le volume V présent dans le sang au bout de 90 mn c'est-à-dire

au bout de $t = \frac{3}{2}$ (une heure et demi)

est $Q\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}.e^{3-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$

Donc : $\boxed{V = 2,24cm^3}$

2)*/ calculons le volume V présent

au bout de $t = \frac{1}{2}$ (une demi heure)

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}e^{3-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}e^{\frac{5}{2}}$$

$\approx 2,03cm^3$.

Le volume de médicament que le patient a-t-il éliminé au bout d'une demi-heure est : $3 - 2,03cm^3$

c'est-à-dire : $0,97cm^3$.

*/ même calcul pour : $t = 1$ (une heure)

$Q(1) = \frac{1}{3}e^2 \approx 2,46$.

D'où le volume qui a était éliminé au bout d'une heure est :

$3 - 2,46 \in \boxed{0,54cm^3}$

3) $Q'(t) = \frac{1}{3}e^{3-t} + \frac{1}{3}t(-1)e^{3-t}$

$$= \frac{1}{3}e^{3-t}(1-t)$$

T.V :

x	0		1		$+\infty$
$Q'(x)$		+	0	−	
$Q(x)$	0	↗	$\frac{1}{3}e^2$	↘	0

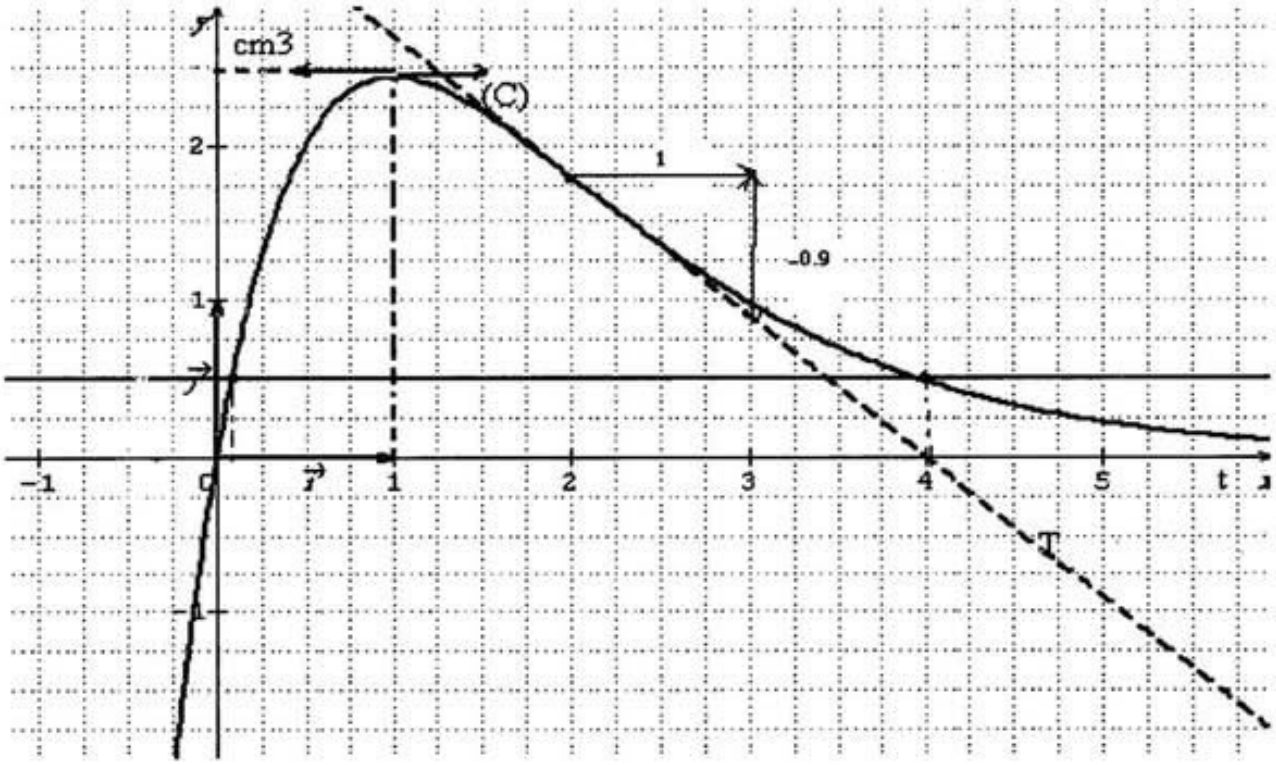
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{3}te^{3-t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{3}\times\frac{t}{e^t}\times e^3$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{e^3}{3}\times\frac{1}{\frac{e^t}{t}} = 0$$

4) le coefficient directeur de T est $Q'(2)$: $Q'(2)=\frac{1}{3}e(-1)=-\frac{e}{3}$

$\boxed{Q'(2) \square -0,9}$

5) courbe :



6) soit $\Delta : y=\frac{1}{2}$: les abscisses des Points de (C) situées au dessous de Δ.

Donc $t \in [0;0.09] \cup [4,+\infty[$

Donc le temps estimé est supérieur à 4 heures